informatika, upravlenie [Radioelectronics, informatics, control]. 2017, no. 3 (42), pp. 78–85.

4. Rosten Edward, Tom Drummond. Machine learning for high-speed corner detection. *9th European Conference on Computer Vision (ECCV)*. 2006, pp. 430–443. DOI : 10.1007/11744023_34.
5. Michael Calonder, Vincent Lepetit, Christoph Strecha, Pascal Fua. BRIEF : Binary Robust Independent Elementary Features. *11th European Conference on Computer Vision (ECCV)*. 2010, pp. 778–792. DOI : 10.1007/978-3-642-15561-1_56.
6. Patin M. V., Korobov D. V. Sravnitel'nyy analiz metodov poiska osobykh tochek i deskriptorov pri gruppirovke izobrazheniy po skhozhemu soderzhaniyu [Comparative analysis of methods for determining interest points and descriptors in similar content based image grouping]. *Molodoy uchyenyy* [Young scientist]. 2016, no. 11, pp. 214–221. Available at : https://moluch.ru/archive/115/31188/. (accessed 3 January 2020).
7. Makarov I. M., Vinogradskaya T. M., Rubchinskiy A. A., Sokolov V. B. *Teoriya vybora i prinyatiya resheniy* [Choise and desition making theory]. Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1982. 328 p.
8. Gorokhovatskiy V. A. *Strukturnyy analiz i intellektual'naya obrabotka dannykh v komp'yuternom* [Structural analysis and intelligent data processing in computer vision]. Kharkov, Kompaniya SMIT Publ., 2014. 316 p.
9. Gorokhovatsky V. A. Efficient Estimation of Visual Object Relevance during Recognition through their Vector Descriptions. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2016, vol. 75, no. 14, pp. 1271–1283.
10. Tarasenko O. P., Trokhimchuk S. M. *Neyronno-merezhevi modeli yakosti. Monografiya* [Nero-network quality models. Monograph]. Kharkiv, 2013. 103 p.
11. Gorokhovatskiy V. A., Pupchenko D. V., Solodchenko K. G. Analiz vlastyvostey, kharakterystyk ta rezul'tativ zastosuvannya novitnikh detektoriv dlya vyvchennya osoblyvykh tochok zobrazhennya [Analysis of properties, characteristics and results of applying innovative detectors for determining image interest points]. *Systemy upravlinnya, navigatsiyi ta zv''yazku* [Control, navigation and communication systems]. 2018, no. 1 (47), pp. 93–98.

Надійшла (received) 18.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гороховатський Володимир Олексійович (Гороховатский Владимир Алексеевич, Gorokhovatskyi Volodymyr Oleksiyovych) – доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (097) 847-83-70; e-mail: gorohovatsky.vi@gmail.com.

Тарасенко Олександр Прокопович (Тарасенко Александр Прокофьевич, Tarasenko Alexander Prokofevich) – кандидат технічних наук, доцент, ДВНЗ «Харківський інститут банківської справи», м. Харків; тел.: (066) 637-25-63; e-mail: tap-top@ukr.net.

Трохимчук Сергій Миколайович (Трохимчук Сергей Николаевич, Trokhymchuk Sergii Mikolayovych) – кандидат технічних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (066) 712-90-70; e-mail: trohimchuk_sn@uipa.edu.ua.

УДК 513.88

С. Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО

О НЕКОТОРЫХ МЕТРИЗУЕМЫХ ТОПОЛОГИЯХ ДЛЯ СЛАБО ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Статья посвящена изучению метризуемых топологий на аддитивной группе вещественных чисел, которые компактифицируют эту группу. Веденная метризуемая топология слабее исходной естественной топологии на вещественной оси. Она является модификацией топологии Марченко. В ней выделена счетная система окрестностей на базе спектра заданной функции. Построена инвариантная метрика, задающая эквивалентную топологию. Доказана компактность пополненного метрического пространства. Рассмотрена псевдометрика, использующая только спектр заданной скалярно почти периодической функции. Для получения хаусдорфового пространства сделан переход к факторпространству. На факторпространстве псевдометрика является метрикой и показано, что значения скалярно почти периодической функции совпадают на первоначальном пространстве и на факторпространстве. Доказано утверждение, что множество скалярно почти периодических функций на оси совпадает с множеством скалярно равномерно непрерывных в этой топологии функций, заданных на метрическом пространстве.

Ключевые слова: метризуемая топология, равномерная непрерывность, почти периодичность, абстрактная функция.

С. Д. ДІМІТРОВА-БУРЛАЄНКО

ПРО ДЕЯКІ МЕТРІЗУЄМІ ТОПОЛОГІЇ ДЛЯ СЛАБО МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Стаття присвячена вивченню метризуємих топологій на адитивній групі дійсних чисел, які компактифікують цю групу. Така метризуєма топологія слабкіша за вихідну природню топологію на дійсній осі. Вона є модифікацією топології Марченко. У ній виділено злічену систему околів на базі спектру заданої функції. Побудовано інваріантну метрику, що задає еквівалентну топологію. Доведено компактність поповненого метричного простору. Розглянуто псевдометрику, що використовує тільки спектр заданої скалярної майже періодичної функції. Для отримання гаусдорфового простору зроблено перехід до факторпростору. На факторпросторі псевдометрика є метрикою і показано, що значення скалярної майже періодичної функції збігаються на первинному просторі і на факторпросторі. Доведено твердження, що множина скалярних майже періодичних функцій на осі збігається з множиною скалярних рівномірно безперервних в цій топології функцій, які задані на метричному просторі.

Ключові слова: метризуєма топологія, рівномірна безперервність, майже періодичність, абстрактна функція.

S. D. DIMITROVA-BURLAYENKO

ON SOME METRIZABLE TOPOLOGIES FOR WEAKLY ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

The article deals with studying metrizable topologies on the additive group of real numbers that compactify this group. The introduced metrizable topology is weaker than the original natural topology on the real axis. It is a modification of the Marchenko topology. In the introduced topology a countable system of neighborhoods is selected based on the spectrum of a given function. An invariant metric is constructed which defines an equivalent topology. The completed metric space is proved to be compact. A pseudometric using only the spectrum of a given scalar almost periodic function is considered. To obtain the Hausdorff space we pass to a factor space. On the factor space the pseudometric is a metric and it is shown that the values of a scalar almost periodic function on the original space coincide with those on the factor space. It is also proved that the set of scalar almost periodic functions on the axis coincides with the set of functions defined on a metric space, which are scalar uniformly continuous in this topology.

Key words: metrizable topology, uniform continuity, almost periodicity, abstract function.

Введение. В ряде случаев рассмотрение *абстрактных почти периодических функций* $f(t):\mathbb{R}\to Y$, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел на оси, Y – *пространство Банаха*, сводится к рассмотрению равномерно непрерывных функций в некоторой метризуемой топологии. В настоящей работе используется топология *В. А. Марченко* [1]. Чтобы получить метризуемую топологию, выделяем счетную базу, ориентированную на определенную функцию. Показано, что почти периодические функции – это равномерно непрерывные функции в этой метрике и только они.

Основные обозначения, базовые определения и предложения. На оси вещественных чисел $\mathbb{R}$ естественную топологию обозначим через $\mathfrak{J}_0$, а некоторую более слабую топологию через $\mathfrak{J}_M$; Y – *сепарабельное пространство Банаха*; Y^*, Y^{**} – сопряженное и второе сопряженное пространства Y; $\langle y^*, x\rangle$ – линейная непрерывная форма на Y, $y^*\in Y^*$, $x\in Y$; S^* – единичная сфера Y^*. Через $f(t)$ обозначим функцию, заданную на $\mathbb{R}$, со значениями в Y.

Множество E называется *относительно плотным множеством* на группе $\mathbb{R}$, если существует q элементов $c_1, c_2, ..., c_q$ таких, что

$$\mathbb{R}=\bigcup_{i=1}^{q}(c_i+E).$$

Если множество $E\subset\mathbb{R}$ относительно плотно, нетрудно показать, что существует число $l>0$, так что $\forall a\in\mathbb{R}\quad (a;a+l)\bigcap E\neq\varnothing$. Такое множество E содержит бесконечную последовательность $\{v_k\}_{-\infty}^{\infty}$ со свойствами:

$$\lim_{k\to-\infty} v_k=-\infty,\ \lim_{k\to+\infty} v_k=+\infty \quad \text{и} \quad v_k<v_{k+1},\quad v_{k+1}-v_k\le l,\quad k=1,2,3,\dots .$$

Относительно плотным множеством интервалов называется множество действительных чисел E, для которого можно указать положительные числа l и δ такие, что любой интервал оси $(a,a+L)$, $L>l$, обязательно содержит интервал $(b,b+\Delta)\subset E$, $\Delta\ge\delta$ [1].

Определение 1*. Непрерывная функция* $f(t):(-\infty,+\infty)\to Y$ *является почти периодической (п.п.), если для любого* $\varepsilon>0$ *множество* $E=\left\{\tau\in R:\sup\limits_{t\in R}\left\| f(t+\tau)-f(t)\right\|<\varepsilon\right\}$ *относительно плотно.*

Определение 2. *Функция* $f(t):(-\infty,+\infty)\to Y$ *называется скалярно почти периодической, если числовая функция* $\langle y^*; f(t)\rangle$, $\forall y^*\in Y^*$ *почти периодична.*

Для скалярно почти периодической функции можно найти *коэффициенты Фурье* a_μ по формуле:

$$\langle y^*, a_\mu\rangle=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{2z}\int_{-z}^{z}\langle y^*, f(t)\rangle exp(-i\mu t)\,dt,\quad y^*\in Y^*.$$

В общем случае коэффициенты Фурье принадлежат Y^{**}, то есть являются *непрерывными линейными функционалами* на Y^*.

Спектром функции $f(t)$ называется множество чисел μ, для которых $a_\mu\neq 0$. Отметим, что любая склярно почти периодическая функция со значениями в сепарабельном банаховом пространстве имеет счетный спектр [2].

Предложение 1 [3]. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *и натуральное* $N=N(\varepsilon)$, *такие, что каждое действительное число* τ, *удовлетворяющее системе неравенств*

$$\left|\exp(i\lambda_n\tau)-1\right|\le\delta \qquad (n=1,2,\dots,N)$$

является $\varepsilon-$ почти периодом почти периодической функции $f(t)$, то есть.

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\left\| f(t+\tau)-f(t)\right\| \le \varepsilon .$$

Следуя В. А. Марченко [1], введем на оси действительных чисел топологию $\Im_M$:

$$E(\delta \mid \lambda)=\left\{x\in \mathbb{R}:|\lambda x|<\delta(mod\, 2\pi)\right\},$$

то есть множество чисел x, для которых существуют целые числа $k\in Z$ такие, что $2\pi k-\delta<\lambda x<2\pi k+\delta$

$$E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\left\{x\in \mathbb{R}:\begin{vmatrix}|\lambda_1 x|<\delta & (mod\, 2\pi)\\ \ldots & \ldots\\ |\lambda_n x|<\delta & (mod\, 2\pi)\end{vmatrix}\right\},$$

то есть множество чисел x, которые являются решениями системы неравенств $|\lambda_i x|<\delta(mod\, 2\pi)$, $i=1,2,\ldots,n$.

Легко видеть, что

$$E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=E(\delta \mid \lambda_1)\bigcap E(\delta \mid \lambda_2)\bigcap \ldots \bigcap E(\delta \mid \lambda_n)$$

и

$$E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\subset E(\delta \mid \lambda_i), \quad i=1,2,\ldots,n,$$

$$E(\delta_1 \mid \lambda)\subset E(\delta_2 \mid \lambda), \quad \text{если} \quad \delta_1<\delta_2 .$$

В. А. Марченко[1] рассматривал все возможные множества вида $E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, где $\delta>0$, λ_i – действительные числа. Отметим некоторые свойства множеств $E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ (доказательства см. в [1]):

а) $E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\subset E(\delta' \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ при $0<\delta<\delta'$;

б) $E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m,\ldots,\lambda_n)\subset E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$, $m<n$;

в) $E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\bigcap E(\delta' \mid \lambda_1',\lambda_2',\ldots,\lambda_{n'}')\supset E(\delta'' \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots,\lambda'_{n'})$ $\delta>0$, $\delta'>0$, $\delta''=min(\delta,\delta')$;

г) $E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\pm E(\delta' \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\subset E(\delta+\delta' \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$;

д) если $x_0\in E(\delta' \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, то $\exists\delta,\ 0<\delta<\delta'$, что $x_0\in E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\subset E(\delta' \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$;

е) для $\forall\varepsilon>0$ и $x\in E(\varepsilon \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ $\exists\delta>0$, что $E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)+x\subset E(\varepsilon \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$;

ж) все множества $E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ являются **относительно плотными** множествами интервалов.

Цель статьи ввести на аддитивной группе вещественных чисел $\mathbb{R}$ метризуемую топологию, используя часть множеств $E(\delta \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$. Эту топологию строим по функции, используя ее спектр. Топология вводится с помощью счетного множества чисел. Это множество должно содержать спектр данной функции, но может содержать еще спектры счетного числа функций. Более того, если спектр задан, то ему может соответствовать несчетное множество функций. Например, если имеем спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, то можно рассмотреть функции вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n exp(i\mu_n t),\ a_n\in Y, \quad t\in \mathbb{R},$$

для которых сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle y^*, a_n\right\rangle\right|<\infty \quad \forall y^*\in S^* .$$

Пусть задана скалярно почти периодическая функция $f_1(t)$ со спектром $\{\mu'_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если среди чисел μ'_n есть 0, то всегда можно найти число μ'_0 так, что все числа $\mu_n=\mu'_n+\mu'_0\neq 0$, $n=1,2,3,\ldots$. Достаточно, вместо функции $f_1(t)$ рассмотреть функцию $f(t)=f_1(t)e^{i\mu'_0 t}$, которая будет иметь спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\mu_n\neq 0$. В дальнейшем будем считать, что функция $f(t)$ имеет спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, который не содержит число 0. Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотное множество рациональных чисел в интервале $(0,\infty)$. Введем счетное множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$\lambda_1=\mu_1, \quad \lambda_2=\frac{\pi}{r_1}, \quad \ldots, \lambda_{2n-1}=\mu_n, \quad \lambda_{2n}=\frac{\pi}{r_n}, \ldots .$$

Основные результаты.

Теорема 1. *Множество окрестностей нуля вида* $\left\{U_n = E\left(\frac{1}{n}\middle|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, *задает базу окрестностей нуля некой топологии* $\Im_M$ *на оси действительных чисел.*

Доказательство: Покажем, что:

1. Единственной точкой принадлежащей всей системе является нуль.

Предположим, что это не так. Пусть $x \neq 0$ произвольное действительное число. Найдем рациональное число r_m такое, что

$$0.99 < \frac{|x|}{r_m} < 1, \quad (\text{например } |x| < r_m < 1{,}001|x|).$$

Тогда $x \notin E\left(1\middle|\frac{\pi}{r_m}\right)$, так как $\pi > \pi\left|\frac{x}{r_m}\right| > 1$. Находим n так, чтобы $\frac{\pi}{r_m}$ было среди чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Тогда $x \notin U_n$, так как $U_n = E\left(\frac{1}{n}|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) \subset E\left(\frac{1}{n}\middle|\frac{\pi}{r_m}\right) \subset E\left(1\middle|\frac{\pi}{r_m}\right)$ и $x \notin E\left(1\middle|\frac{\pi}{r_m}\right)$. Этим доказано, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$.

2. Для всякой окрестности $\boldsymbol{U_m}$ найдется окрестность $\boldsymbol{U_n}$, такая что

$$\boldsymbol{U_n \pm U_n \subset U_m}.$$

Достаточно взять $n \geq 2m$ и заметить, что окрестности вида $E\left(\frac{1}{n}|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$ симметрические множества.

$$x \in \boldsymbol{U_n} \;\Leftrightarrow\; 2\pi k_i' - \frac{1}{n} < \lambda_i x < 2\pi k_i' + \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y \in \boldsymbol{U_n} \;\Leftrightarrow\; 2\pi k_i'' - \frac{1}{n} < \lambda_i y < 2\pi k_i'' + \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$x \pm y \;\Leftrightarrow\; 2\pi\left(k_i' \pm k_i''\right) - \frac{2}{n} < \lambda_i\left(x \pm y\right) < 2\pi\left(k_i' \pm k_i''\right) + \frac{2}{n} \quad \to \quad \left|\lambda_i\left(x \pm y\right)\right| < \frac{2}{n}\left(mod\, 2\pi\right),$$

$$U_n \pm U_n \subset E\left(\frac{2}{n}|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_n\right) \subset E\left(\frac{2}{2m}|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_n\right) \subset E\left(\frac{1}{m}|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) = U_m.$$

3. Пересечение $U_{\boldsymbol{k}} \cap U_m$ содержит некоторую окрестность $\boldsymbol{U_n}$, где $\boldsymbol{n > max\{k, m\}}$.

Случай $k = m$ тривиальный. Пусть для определенности $k < m$. Так как $\frac{1}{n} < \frac{1}{k}$ и $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$, то

$$U_n = E\left(\frac{1}{n}|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_n\right) \subset E\left(\frac{1}{k}|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\right) = U_k,$$

$$U_n = E\left(\frac{1}{n}|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_n\right) \subset E\left(\frac{1}{m}|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m\right) = U_m.$$

Следовательно,

$$U_n \subset U_k \bigcap U_m.$$

4. Для любой точки $\boldsymbol{x \in U_m}$ найдется окрестность $\boldsymbol{U_n}$ так, что $\boldsymbol{x + U_n \subset U_m}$.

Так как $x \in E\left(\frac{1}{m}|\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right)$, то

$$\lambda_1 x = 2\pi k_1 + \gamma_1, \; -\frac{1}{m} < \gamma_1 < \frac{1}{m}$$

$$\lambda_2 x = 2\pi k_2 + \gamma_2, \; -\frac{1}{m} < \gamma_2 < \frac{1}{m}$$

....

$$\lambda_m x = 2\pi k_m + \gamma_m, \; -\frac{1}{m} < \gamma_m < \frac{1}{m}.$$

Тогда

$$\max_{1\le i\le m}|\gamma_i| = \gamma < \frac{1}{m}.$$

Находим δ так, что

$$\gamma < \delta < \frac{1}{m} \;\Rightarrow\; x \in E\left(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right).$$

Выбираем число n $(n > m)$ так, что $\frac{1}{n} < \frac{1}{m} - \delta$ или $\delta + \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$,

$$E\left(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) + E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) \subset E\left(\delta + \frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right).$$

Тогда

$$x + U_n \subset E\left(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) + E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_n\right) \subset E\left(\delta \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) + E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) \subset$$

$$\subset E\left(\delta + \frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) \subset E\left(\frac{1}{m} \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) = U_m.$$

Таким образом, показано, что система окрестностей $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базу окрестностей нуля аддитивной группы вещественных чисел ([5] стр. 108, гл. 3, §18). Теорема 1 доказана.

На действительной оси рассмотрим топологию $\mathfrak{I}_\rho$, задаваемую функцией $\rho(u,v)$ $(\lambda_n \ne 0)$:

$$\rho(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup\limits_t \left| exp\left(i\lambda_n (u+t)\right) - exp\left(i\lambda_n (v+t)\right)\right|}{1 + \sup\limits_t \left| exp\left(i\lambda_n (u+t)\right) - exp\left(i\lambda_n (v+t)\right)\right|} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup\limits_t \left| exp\left(i\lambda_n (t+v)\right)\left[exp\left(i\lambda_n (u-v)\right) - 1\right]\right|}{1 + \sup\limits_t \left| exp\left(i\lambda_n (t+v)\right)\left[exp\left(i\lambda_n (u-v)\right) - 1\right]\right|} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\left| exp\left(i\lambda_n (u-v)\right) - 1\right|}{1 + \left| exp\left(i\lambda_n (u-v)\right) - 1\right|}.$$

Теорема 2. *Функция $\rho(u,v)$ является инвариантным расстоянием между точками u и v. Операции сложения и нахождения обратного элемента непрерывны. Топология $\mathfrak{I}_\rho$, определяемая расстоянием $\rho(u,v)$, слабее исходной топологии $\mathfrak{I}_0$.*

Доказательство: Функция $\rho(u,v)$ выполняет все требования расстояния.

Неотрицательность $\rho(u,v) \ge 0$ следует из формулы $\rho(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\left| exp\left(i\lambda_n (u-v)\right) - 1\right|}{1 + \left| exp\left(i\lambda_n (u-v)\right) - 1\right|}$

Покажем теперь, что из $\rho(u,v) = 0$ следует, что $u = v$. Пусть $\rho(u,v) = 0$, тогда

$$\forall n \qquad \left| exp\left(i\lambda_n (u-v)\right) - 1\right| = 0$$

или

$$\left(1 - cos\left(\lambda_n (u-v)\right)\right)^2 + \left(sin\left(\lambda_n (u-v)\right)\right)^2 = 0,$$

$$2\left| sin\left(\frac{\lambda_n (u-v)}{2}\right)\right| = 0,$$

$$\left|\lambda_n (u-v)\right| = 2l\pi, \quad l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Покажем, что случай $l \ne 0$ (то есть $|u-v| > 0$) приводит к противоречию. Если $|u-v| > 0$ можно найти $\lambda_{2n} = \frac{\pi}{r_n}$ так, что $0,99 < \left|\frac{u-v}{r_n}\right| < 1,01$ и $3 < \left|\lambda_{2n}(u-v)\right| < 3,2$. Для любого n должно быть $\left|\lambda_n (u-v)\right| = 2l\pi$ и в частности $\left|\lambda_{2n}(u-v)\right| = 2l\pi$, но с другой стороны должно быть $3 < 2l\pi < 3,2$. Последнее невозможно. Следовательно, $l = 0$ и $u = v$, то есть из $\rho(u,v) = 0$ следует $u = v$.

Покажем **симметричность**, то есть $\boldsymbol{\rho(u,v)=\rho(v,u)}$:

$$\rho(u,v)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)-1\right|}{1+\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)-1\right|}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)\right|\left|1-exp\left(i\lambda_n(v-u)\right)\right|}{1+\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)\right|\left|1-exp\left(i\lambda_n(v-u)\right)\right|}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\left|1-exp\left(i\lambda_n(v-u)\right)\right|}{1+\left|1-exp\left(i\lambda_n(v-u)\right)\right|}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\left|exp\left(i\lambda_n(v-u)\right)-1\right|}{1+\left|exp\left(i\lambda_n(v-u)\right)-1\right|}=\rho(v,u)\ .$$

Неравенство треугольника $\boldsymbol{\rho(u,v)\le\rho(u,w)+\rho(w,v)}$ непосредственно вытекает из неравенств:

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

и

$$\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)-1\right|=\left|exp\left(i\lambda_n\left((u-w)+(w-v)\right)\right)-1\right|=$$

$$\left|exp\left(i\lambda_n(u-w)\right)\left\{\left(exp\left[i\lambda_n(w-v)\right]-1\right)+1\right\}-1\right|\le$$

$$\left|exp\left(i\lambda_n(u-w)\right)\left[exp\left(i\lambda_n(w-v)\right)-1\right]+\left[exp\left(\lambda_n(u-w)\right)-1\right]\right|\le$$

$$\left|exp\left(i\lambda_n(u-w)\right)-1\right|+\left|exp\left(i\lambda_n(w-v)\right)-1\right|\ .$$

Покажем, что **расстояние инвариантно относительно трансляций**, то есть

$$\boldsymbol{\rho(u+w,v+w)=\rho(u,v)}$$

$$\rho(u+w,v+w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\left|exp\left(i\lambda_n(u+w-v-w)\right)-1\right|}{1+\left|exp\left(i\lambda_n(u+w-v-w)\right)-1\right|}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)-1\right|}{1+\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)-1\right|}=\rho(u,v).$$

Операции сложения и нахождения обратного элемента непрерывны в топологии $\mathfrak{J}_\rho$:
если

$$\rho(u,u')<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ и }\ \rho(v,v')<\frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

то

$$\rho(u+v,u'+v')=\rho\left(u,(u^{'})+(v'-v)\right)\le\ \rho(u,u')+\rho\left(u'+(0),u'+(v'-v)\right)=$$

$$=\rho(u,u')+\rho(0,v'-v)=\rho(u,u')+\rho(v,v')<\varepsilon\ .$$

Таким образом, операция суммы непрерывна.

Если $\rho(u,u')<\varepsilon$, то $\rho(-u,-u')=\rho(u,u')<\varepsilon.$ Следовательно, операция нахождения обратного элемента непрерывна.

Покажем, что топология $\boldsymbol{\mathfrak{J}_\rho}$ слабее исходной топологии $\boldsymbol{\mathfrak{J}_0}$. Замечая, что

$$\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)-1\right|=2\left|sin\left(\frac{\lambda_n(u-v)}{2}\right)\right|,$$

получим оценку:

$$\rho(u,v)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\frac{\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)-1\right|}{1+\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)-1\right|}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)-1\right|}{1+\left|exp\left(i\lambda_n(u-v)\right)-1\right|}\le$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}2\left|sin\left(\frac{\lambda_n(u-v)}{2}\right)\right|+\frac{1}{2^N}\ .$$

По числу $\varepsilon>0$ находим N так, что

$$\frac{1}{2^{N-1}}<\varepsilon.$$

Выражение

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}2\left|sin\left(\frac{\lambda_n(u-v)}{2}\right)\right|$$

равномерно непрерывно относительно $|u-v|$ на всей оси и поэтому можно найти $\delta > 0$ так, что при $|u-v| < \delta$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}2\left|sin\left(\frac{\lambda_n(u-v)}{2}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\rho(u,v) < \varepsilon.$$

Последняя оценка показывает, что если $|u-v| \to 0$, то и $\rho(u,v) \to 0$. Таким образом, топология $\Im_\rho$ слабее исходной топологии $\Im_0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Топология $\Im_\rho$, определенная метрикой $\rho(u,v)$, эквивалентна топологии $\Im_M$, определенной системой окрестностей $U_n = E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.*

Доказательство: Предположим, что $u_k \underset{k}{\to} 0$ по метрике, то есть $\rho(u_k, 0) \underset{k}{\to} 0$.

Пусть задана окрестность $U_n = E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$. Найдем такое N, что при $k > N = N(n)$

$$\rho(u_k, 0) < \frac{1}{2^{n+1}} sin\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Тогда

$$\frac{sin\left(\left|\frac{\lambda_m u_k}{2}\right|\right)}{2^{n+1}} \le \frac{1}{2^m}\frac{|exp(i\lambda_m u_k)-1|}{1+|exp(i\lambda_m u_k)-1|} \le \rho(u_k,0) < \frac{1}{2^{n+1}} sin\left(\frac{1}{2n}\right), \; m = 1, 2, \ldots, n,$$

$$sin\left(\left|\frac{\lambda_m u_k}{2}\right|\right) \le sin\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\frac{1}{2n} + k\pi < \frac{\lambda_m u_k}{2} < \frac{1}{2n} + k\pi, \; |\lambda_m u_k| < \frac{1}{n}(mod\, 2\pi), \; m = 1, 2, 3, \ldots, n \text{ при } k > N.$$

Последнее означает, что

$$u_k \in U_n \quad \forall k > N,$$

то есть $u_k \underset{k}{\to} 0$ в топологии $\Im_M$.

Пусть теперь $u_k \underset{k}{\to} 0$ в топологии $\Im_M$, и $\varepsilon > 0$. Находим целое число $n_1 > 1$ так, что $\frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда и $\frac{1}{2^{n_1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Находим номер $N > n_1$ так, что при $k > N$ $u_k \in U_N$. Тогда, при $k > N$

$$|exp(i\lambda_n(u_k)) - 1| \le |\lambda_n u_k| < \frac{1}{N} < \frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon}{4} \qquad n = 1, 2, \ldots, N$$

и

$$\rho(u_k,0) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\frac{|exp(i\lambda_n u_k)-1|}{1+|exp(i\lambda_n u_k)-1|} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|exp(i\lambda_n u_k)-1|}{1+|exp(i\lambda_n u_k)-1|} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2^{n_1}} < \varepsilon.$$

Это и означает, что если $u_k \underset{k}{\to} 0$ в топологии $\Im_M$, то $u_k \underset{k}{\to} 0$ в топологии $\Im_\rho$. Топологии $\Im_M$ и $\Im_\rho$ эквивалентны. Таким образом, теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Метрическое пространство $(\mathbb{R}, \rho(.,.))$ предкомпактно и после пополнения $(T, \rho(.,.))$ является метрическим компактом.*

Доказательство: Покажем, что из любой последовательности чисел можно выделить фундаментальную последовательность в топологии $\Im_M$ $(\Im_\rho)$.

Пусть задана последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим последовательность окрестностей нуля $V_n = U_{2^n}$ (то есть $\delta = \frac{1}{2^n}$), $V_{n+1} \subset V_n$ и $V_{n+1} \pm V_{n+1} \subset V_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Каждая из окрестностей V_n является относительно плотным множеством интервалов. Возьмем V_1 и запишем $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{q_1}\left(a_i^{(1)} + V_1\right)$. Хотя бы в одной из окрестностей $a_{i(1)}^{(1)}+V_1$ находится бесконечное число членов $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, то есть

$$\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(1)}^{(1)}+V_1, \quad \left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Далее, возьмем V_2 и запишем

$$a_{i(1)}^{(1)}+V_1 \subset \bigcup_{i=1}^{q_2}\left(a_i^{(2)}+V_2\right),\ a_i^{(2)}+V_2 \subset a_{i(1)}^{(1)}+V_1,\ i=1,2,...,q_2.$$

Хотя бы в одной из окрестностей $a_{i(2)}^{(2)}+V_2$ находится бесконечное число членов $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, то есть

$$\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(2)}^{(2)}+V_2 \subset a_{i(1)}^{(1)}+V_1, \quad \left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получим:

$$\left\{x_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(n)}^{(n)}+V_n, ..., a_{i(n+p)}^{(n+p)}+V_{n+p} \subset ... \subset a_{i(n+1)}^{(n+1)}+V_{n+1},$$

$$\left\{x_k^{(n+p)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(n+p)}^{(n+p)}+V_{n+p}, \quad \left\{x_k^{(n+p)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{x_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$\text{то есть } \left\{x_k^{(n+p)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(n+1)}^{(n+1)}+V_{n+1} \quad \forall p=1,2,3,...$$

и

$$\left\{x_k^{(n+1)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(n+1)}^{(n+1)}+V_{n+1}.$$

Обозначим через

$$y_s = x_s^{(s)},\ s=1,2,3,\ldots,n,\ldots,n+p,\ldots.$$

Тогда для любого p,

$$y_{n+p}-y_{n+1} \in V_{n+1}-V_{n+1} \subset V_n$$

и последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна. Чтобы получить компактность последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, нужна полнота пространства $(\mathbb{R},\mathfrak{J}_M)$. Отметим, что множество рациональных чисел счетно и плотно в топологии $\mathfrak{J}_0$. Так как топология $\mathfrak{J}_M$ слабее топологии $\mathfrak{J}_0$, то оно плотно и в топологии $\mathfrak{J}_M$. Таким образом, пространство $(\mathbb{R},\mathfrak{J}_M)$ сепарабельно и имеет счетную базу окрестностей нуля. Его можно плотно вложить в его пополнение $(T,\mathfrak{J}_M)$ [4]. Тогда последовательность $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ (это образ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $(T,\mathfrak{J}_M)$) будет компактной. Компактной будет и любая другая последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $(T,\mathfrak{J}_M)$, так как ее можно аппроксимировать последовательностью $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $(\mathbb{R},\mathfrak{J}_M)$ и $z_k-x_k \underset{k}{\to} 0$ (в силу плотности $\mathbb{R}$ в T). Тогда компактность $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ влечет компактность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следовательно, пространство $(T,\mathfrak{J}_M)$ компактно. Этим теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Функция $f(t):(\mathbb{R},\mathfrak{J}_M)\to Y$ скалярно почти периодична тогда и только тогда, когда она скалярно равномерно непрерывна на $(\mathbb{R},\mathfrak{J}_M)$.*

Доказательство: Пусть функция $f(t)$ скалярно почти периодическая и $y^*\in S^*$. Тогда $\left\langle y^*, f(t)\right\rangle$ является числовой почти периодической функцией на $\mathbb{R}$. Согласно Предложению 1 для заданного $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ и конечное множество чисел $\{\mu'_s\}_{s=1}^{k}$ из спектра функции $\left\langle y^*, f(t)\right\rangle$, что из выполнения неравенств

$$\left|\exp(i\mu'_s\tau)-1\right|\le\delta,\ (s=1,2,\ldots,k), \text{ то есть } \tau\in E(\delta\,|\,\mu'_1,\mu'_2,\ldots,\mu'_k),$$

следует, что τ есть $\varepsilon-$почти период функции $\left\langle y^*, f(t)\right\rangle$, то есть

$$\sup_t |\left\langle y^*, f(t+\tau)-f(t)\right\rangle| < \varepsilon,$$

или

$$\tau\in E\left(\delta\,|\,\mu_1',\mu_2',\ldots,\mu_k'\right)\subset\left\{\tau\in\mathbb{R}:\sup_t|\left\langle y^*,f(t+\tau)\right\rangle-\left\langle y^*,f(t)\right\rangle|<\varepsilon\right\}.$$

Находим N_1 так, что $\dfrac{1}{N_1}<\delta$ и N_2 так, что $\{\mu'_s\}_{s=1}^{k}\subset\{\lambda_n\}_{n=1}^{N_2}$. Тогда для $m>max\{N_1,N_2\}$

$$U_m\subset E\left(\delta\,|\,\mu_1',\mu_2',\ldots,\mu_k'\right)$$

и

$$U_m\subset E\left(\delta\,|\,\mu_1',\mu_2',\ldots,\mu_k'\right)\subset\left\{\tau\in\mathbb{R}:\sup_t|\left\langle y^*,f(t+\tau)\right\rangle-\left\langle y^*,f(t)\right\rangle|<\varepsilon\right\}.$$

Следовательно, функция $\left\langle y^*,f(t)\right\rangle$ равномерно непрерывна на $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_M)$.

Обратно, если функция $\left\langle y^*,f(t)\right\rangle$ равномерно непрерывна на $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_M)$, то для заданного $\varepsilon>0$ существует окрестность U_m такая, что

$$U_m\subset\left\{\tau\in\mathbb{R}:\sup_t|\left\langle y^*,f(t+\tau)\right\rangle-\left\langle y^*,f(t)\right\rangle|<\varepsilon\right\}.$$

Любая окрестность U_m является относительно плотным множеством и по определению 1 функция $\left\langle y^*,f(t)\right\rangle$ почти периодична, то есть функция $f(t)$ скалярно почти периодична. Следовательно, теорема 5 доказана.

Замечание. *Можно ввести метризуемую топологию на оси только по спектру, используя модуль* $\mathfrak{M}=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots\}$ *показателей Фурье слабо почти периодической функции* $f(t):\mathbb{R}\to Y$. *В этом случае ограничения на спектр не накладываются (число 0 также допускается).*

Для получения хаусдорфового пространства необходимо перейти к факторпространству. Легко видеть, что формула

$$d(u,v)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\sup_t\left|exp\left(i\mu_n(u+t)\right)-exp\left(i\mu_n(v+t)\right)\right|}{1+\sup_t\left|exp\left(i\mu_n(u+t)\right)-exp\left(i\mu_n(v+t)\right)\right|}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\left|exp\left(i\mu_n(u-v)\right)-1\right|}{1+\left|exp\left(i\mu_n(u-v)\right)-1\right|}$$

дает псевдометрику. Применяя стандартный прием, рассмотрим инвариантную нормальную подгруппу $\mathbb{H}=\{q\in\mathbb{R}:d(q,0)=0\}$ и по ней определим отношение эквивалентности $u\equiv v(mod\ \mathbb{H})\Leftrightarrow u-v\in\mathbb{H}$. Переходим к факторгруппе $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}/\mathbb{H}$. Тогда, если

$$u=\xi+z\,,\ v=\zeta+z\,,\ z\in\mathbb{H}\,,$$

то

$$d(u,v)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\left|exp\left(i\mu_n(\xi+z-\zeta-z)\right)-1\right|}{1+\left|exp\left(i\mu_n(\xi+z-\zeta-z)\right)-1\right|}=d(\xi,\zeta)\,.$$

Таким образом, расстояние $d(u,v)$ на факторгруппе $\mathbb{R}_1$ не зависит от представителей (ξ,ζ).

Покажем, что значение функции $f(t)$, $t\in\mathbb{R}$, совпадает со значением $f(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}_1$, где $t=\xi+z$, $z\in\mathbb{H}$. Заметим, что $z\in\mathbb{H}$ означает, что

$$d(z,0)=0\ \text{или}\ exp(i\mu_n z)=1\ \ \forall n$$

или

$$exp(i\mu_n t)=exp\left(i\mu_n(\xi+z)\right)=exp(i\mu_n\xi)exp(i\mu_n z)=exp(i\mu_n\xi)\,.$$

Функцию $\left\langle y^*,f(t)\right\rangle$ можно равномерно аппроксимировать тригонометрическим полиномом [3], выбирая показатели экспонент тригонометрического полинома из множества показателей Фурье $\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots\}$. Для любого $\varepsilon>0$ и функционала $y^*\in S^*$ можно найти полином $\sum_{k=1}^{Q_\varepsilon\left(y^*\right)}a_k\left\langle y^*,A_k\right\rangle exp(i\mu_k t)$ такой, что

$$\left|\left\langle y^*,f(t)\right\rangle-\sum_{k=1}^{Q_\varepsilon\left(y^*\right)}a_k\left\langle y^*,A_k\right\rangle exp(i\mu_k t)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall t.$$

Тогда для $t=\xi+z$

$$\left|\left\langle y^*, f(t)\right\rangle - \left\langle y^*, f(\xi)\right\rangle\right| \le$$

$$\left|\left\langle y^*, f(\xi+z)\right\rangle - \sum_{k=1}^{Q_\varepsilon\left(y^*\right)} a_k \left\langle y^*, A_k\right\rangle exp\left(i\mu_k(\xi+z)\right)\right| + \left|\sum_{k=1}^{Q_\varepsilon\left(y^*\right)} a_k \left\langle y^*, A_k\right\rangle exp\left(i\mu_k(\xi+z)\right) - \left\langle y^*, f(\xi)\right\rangle\right| \le$$

$$\left|\left\langle y^*, f(t)\right\rangle - \sum_{k=1}^{Q_\varepsilon\left(y^*\right)} a_k \left\langle y^*, A_k\right\rangle exp\left(i\mu_k(t)\right)\right| + \left|\left\langle y^*, f(\xi)\right\rangle - \sum_{k=1}^{Q_\varepsilon\left(y^*\right)} a_k \left\langle y^*, A_k\right\rangle exp\left(i\mu_k\xi\right)\right| < \varepsilon.$$

Число ε произвольно и поэтому $\left\langle y^*, f(t)\right\rangle = \left\langle y^*, f(\xi)\right\rangle$ для любого функционала $y^* \in S^*$.Следовательно, $f(t) = f(\xi)$ для любого $t = \xi + z$, $z \in \mathbb{H}$ или $f(t) = f(\xi)$, $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}_1$.

Выводы. Исследование скалярно почти периодических функций можно свести к исследованию скалярной равномерной непрерывности функций, заданных на метрическом пространстве. Подход к исследованию почти периодичности через замену на исследование равномерной непрерывности часто применяется (см. например [1], [6], [7], [9], [10] и др.). Отметим, что если функция в топологии Марченко является только непрерывной, то она является Левитановской почти периодической функцией ([1], [8]).

Список литературы

1. *Марченко В. А.* Методы суммирования обобщенных рядов Фурье // Записки научно-исследовательского института математики и механики ХГУ и Харьковского математического общества. – 1950. – Т. XX. – С. 3 – 32.
2. *Кадец М. И., Кюрстен К. Д.* Счетность спектра слабо почти-периодических функций со значениями в банаховом простраанстве // Теория функций, функц. анал и прил. – 1980. – Вып. 33. – С. 45 – 49.
3. Левитан Б. М., Жиков В.В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М. : МГУ, 1978. – 204с.
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. – М. : Наука, 1965. – 519 с.
5. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. – М. : Наука, 1973. – 520 с.
6. *Димитрова С. Д.* Криволинейный интеграл от почти периодических и почти периодических по Левитану функцій // Вісник Харківського университету. Серія : Математика, прикладна математика і механіка. – 2001. – № 514. – С. 106 – 114.
7. *Димитрова С. Д., Димитров Д. Б.* Теорема о сохранении непрерывности // Вісник Харківского національного університету. Серія : Математика, прикладна математика і механіка. – 2003. – № 602. – Вып. 53. – С.77 – 81.
8. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Представление L – почти периодических функций как непрерывные функции на топологической группе // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2010. – Вып 68. – С. 65 – 75.
9. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Условия сохранения непрерывности при дифференцировании функций // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях. Сборник научных статей. – Х. : Вировец А.П. «Апостроф», 2011. – С. 332 – 333.
10. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Критерии сохранения почти периодичности второй производной от почти периодической функции // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – № 22 (1347) – С. 23 – 30.

References (transliterated)

1. Marchenko V. A. Metody summirovaniya obobshhennykh ryadov Fur'ye [Summation Methods of Generalized Fourier Series]. *Zapiski nauchno issledovatel'skogo instituta matematiki i mekhaniki KhGU i Khar'kovskogo matematicheskogo obshhestva* [Notes of the Research Institute of mathematics and mechanics of the Kharkov National University and Kharkov mathematical society]. 1950, vol. XX, pp. 3–32.
2. Kadets M. I., Kyursten K. D. Shhetnost' spektra slabo pochti-periodicheskikh funktsiy so znacheniyami v banakhovom prostraanstve [Countability of the spectrum of weakly almost periodic functions with values in a Banach space]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nogo analiza i prilozhniya* [Theory of functions, functional analysis and applications]. 1980, vol. 33, pp. 45–49.
3. Levitan B. M., Zhikov V. V. *Pochti periodicheskie funktsii i differentsial'nyye uravneniya* [Almost periodic functions and differential equations]. Moscow, MGU Publ., 1978. 205 p.
4. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 519 p.
5. Pontryagin L. S. *Nepreryvnyye gruppy* [Continuous Groups]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 520 p.
6. Dimitrova S. D. Krivolineynyy integral ot pochti periodicheskikh i pochti periodicheskikh po Levitanu funktsiy [Curvilinear integral of almost periodic and Levitan almost periodic functions]. *Visnyk Kharkivs'kogo universytetu. Seriya : Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika* [Bulletin of the V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser.: Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics]. 2001, vol. 514, pp. 106–114.
7. Dimitrova S. D., Dimitrov D. B. Teorema o sokhranenii nepreryvnosti [The theorem on the preservation of continuity]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo universytetu. Seriya : Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika* [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. : Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics]. 2003, no. 602, vol. 53, pp. 77–81.
8. Dimitrova-Burlayenko S. D. Predstavleniye L – pochti periodicheskikh funktsiy kak nepreryvnyye funktsii na topologicheskoy gruppe [Representation of L-almost periodic functions as continuous functions on a topological group]. *Visnyk natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2010, no. 68, pp. 65–75.
9. Dimitrova-Burlayenko S. D. Usloviya sokhraneniya nepreryvnosti pri differentsirovanii funktsiy [Conditions for maintaining continuity when differentiating functions]. *Sovremennyye problemy matematiki i eye prilozheniya v estestvennykh naukakh i informatsionnykh tekhnologiyakh. Sbornik nauchnykh statey* [Contemporary problems of mathematics and its applications to natural sciences and information technologies. Collection of scientific papers]. Kharkov, Virovets A.P. «Apostrof» Publ., 2011, pp. 332–333.

10. Dimitrova-Burlayenko S. D. Kriterii sokhraneniya pochti periodichnosti vtoroy proizvodnoy ot pochti periodicheskoy funktsii [Criterions for preserving almost periodicity of the second derivative of an almost periodic function]. *Visnyk natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2019, no. 22 (1347), pp. 23–30.

Поступила (received) 17.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Дімітрова-Бурлаєнко Світлана Дімова (Димитрова-Бурлаенко Светлана Димова, Dimitrova-Burlayenko Svetlana Dimova) – кандидат педагогічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: s.dimitrovaburlayenko@gmail.com.

УДК 629.1.02

А. П. КОЖУШКО

ДОСЛІДЖЕННЯ МАЛИХ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ АГРЕГАТІВ ЗМІННОЇ МАСИ

Наведено математичні моделі для визначення поперечних коливань агрегатів змінної маси (причіпних та напівпричіпних цистерн) при виконанні транспортної роботи у складі машинно-тракторного агрегату. В математичній моделі шляхом використання характеристики поверхневих хвиль Релея враховано перерозподіл рідини у цистерні, який викликано поперечними коливаннями оболонки. Встановлено, що дія поперечних коливань рідини на транспортній швидкості в одновісній напівпричіпній цистерні на поперечні зміщення вісі не суттєва. Тому що центр мас цистерни розташовано попереду колісної вісі, що забезпечує її поперечну стійкість руху. Визначено, що на поперечну стійкість причіпної цистерни суттєвий вплив спричиняє перерозподіл мас в цистерні, особливо це помітно при дослідженні виляння задньої вісі цистерни.

Ключові слова: колісний трактор, цистерна, поперечні коливання, перерозподіл мас, виляння агрегату.

А. П. КОЖУШКО

ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ АГРЕГАТОВ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Приведены математические модели для определения поперечных колебаний агрегатов переменной массы (прицепных и полуприцепных цистерн) при выполнении транспортной работы в составе машинно-тракторного агрегата. В математической модели путем использования характеристики поверхностных волн Рэлея учтено перераспределение жидкости в цистерне, которое вызвано поперечными колебаниями оболочки. Установлено, что действие поперечных колебаний жидкости на транспортной скорости в одноосной полуприцепной цистерне на поперечные смещения оси несущественно. Потому что центр масс цистерны расположен впереди колесной оси, что обеспечивает ее поперечную устойчивость движения. Определено, что на поперечную устойчивость прицепной цистерны существенное влияние оказывает перераспределение масс в цистерне, особенно это заметно при исследовании виляния задней оси цистерны.

Ключевые слова: колесный трактор, цистерна, поперечные колебания, перераспределение масс, виляние агрегата.

A. P. KOZHUSHKO

STUDYING SMALL TRANSVERSE VIBRATIONS OF VARIABLE MASS UNITS

Mathematical models are given for determining the transverse vibrations of variable mass units (trailed and semi-trailer tanks) when performing transport work as a part of a machine-tractor unit. In the mathematical model the redistribution of liquid in the tank, which is caused by transverse vibrations of the shell, is taken into account using the characteristics of Rayleigh surface waves. It is established that in a uniaxial semi-trailer tank at the transport speed the effect of the transverse vibrations of the liquid on the transverse displacements of the axis is negligible. The reason is that the center of mass of the tank is located in front of the wheel axle, which ensures its lateral stability of movement. It was determined that the lateral stability of the trailer tank is significantly affected by the redistribution of masses in the tank, this is especially noticeable when studying the wobble of the rear axle of the tank.

Key words: wheeled tractor, tank (cistern), lateral vibrations, mass redistribution, unit wagging.

Вступ та постановка задач дослідження. Виконання транспортної роботи *колісним трактором* базується на перевезенні різного роду вантажу. Транспортований агрегат кріпиться до колісного трактора *тягово-зчіпним пристроєм* – це призводить до появи додаткових ступенів свободи, а також, як результат, до появи *малих поперечних коливань* (*виляння*) агрегату. Великий вплив на поперечні коливання транспортованих агрегатів несе присутність *еластичних пневматичних шин*. Окрім того, необхідно відмітити, що поперечні коливання причіпного та/або напівпричіпного агрегатів виникають, в більшій мірі, за рахунок впливу автоколивальних процесів системи і, в меншій мірі, від періодичних збурювальних сил, які виникають при русі по дорожньому покриттю.

Розглядаючи багатокомпонентний складний рух колісного трактора при транспортуванні агрегатів *змінної маси* (*тракторних цистерн*), неможливо оминути питання поперечних коливань. І, хоча їх дія на колісний трактор не суттєва (за рахунок зазору в тягово-зчіпному пристрої), але виляння цистерни при русі по дорогах загального користування може спричинити виникнення дорожньо-транспортних пригод.